



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii resurse naturale și protecția mediului.

Profilul real specializarea științele naturii.

Profilul tehnic

Faza locală, 5 martie 2016

Clasa a XII-a

### Subiectul 1 (7 puncte)

Arătați că aplicația  $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$  este o lege de compoziție pe  $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$  și determinați elementele simetrizabile.

#### Barem

Se demonstrează că pentru orice  $x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$  .....(3p)

Aflarea elementului neutru,  $e$ , ..... (2p)

$\forall x \in G, \exists x' = e^{1/\ln x} \in G$  .....(2p)

### Subiectul 2 (7 puncte)

Pe  $\mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție  $x * y = xy + 5x + ay + b$ . Determinați valorile reale ale lui  $a$  și  $b$  pentru care legea admite element neutru.

#### Barem

Din  $x * e = e * x, \forall x \in \mathbb{R}$  obținem  $x(5 - a) = e(5 - a), \forall x \in \mathbb{R}$ , deci  $a = 5$ .....(3p)

Din  $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$  obținem  $x(5 + e) + 5e + b = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , deci  $e + 5 = 1$  și  $5e + b = 0$ . Deci  $b = 20$ .....(4p)

### Subiectul 3 (7 puncte)

a) Fie funcția  $f_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha}$ . unde  $\alpha \in [0, \infty)$ . Să se calculeze  $I = \int f_\alpha(x) dx$ .

b) Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât



$$\int [f(x) + (f \circ f)(x)] dx = x^2 + 1008x + C$$

**Barem**

$$a) I = \int \frac{1}{x^2 + \alpha} dx = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C, \alpha = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C, \alpha > 0 \end{cases} \quad (2p)$$

$$b) \int [f(x) + (f \circ f)(x)] dx = \int [ax + b + a(ax + b) + b] dx = \int [x(a + a^2) + ab + 2b] dx = \quad (1p)$$

$$= (a^2 + a) \frac{x^2}{2} + (ab + 2b)x + C \quad (1p)$$

$$(a^2 + a) \frac{x^2}{2} + (ab + 2b)x + C = x^2 + 1008x + C \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + a}{2} = 1 \\ ab + 2b = 1008 \end{cases} \quad (1p)$$

Deci  $f_1(x) = x + 336$ . (2p)

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = \ln(x)$ .

a) Să se calculeze  $I_1 = \int_1^2 f\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ .

b) Să se calculeze  $I_2 = \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ .

**Barem**

a) Prin calcule se obține  $I_1 = 2 - 4\ln 2$ .....(3p)

b)  $I_2 = \frac{3}{2}$ .....(4p)